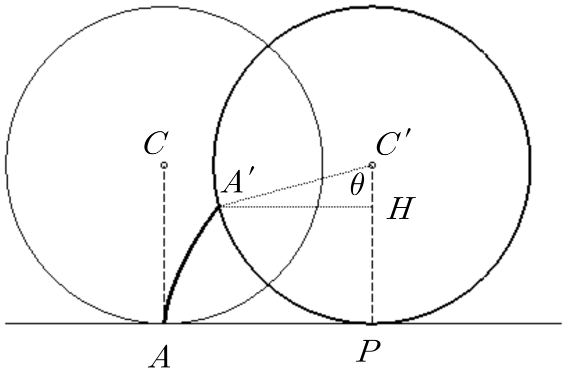
문제 1 (50 점)

바퀴에 야광패널이 붙은 자전거가 어둠 속에서 지나가면 이 야광패널이 매우 독특한 곡선을 그리게 된다. 이 곡선을 수학적으로 정의하면 싸이클로이드(cycloid)곡선이 된다. 싸이클로이드곡선은 직선 위를 미끄러지지 않고 굴러가는 원 위의 한 점이 그리는 곡선이다.

싸이클로이드곡선을 방정식으로 나타낼 때는 매개변수를 이용한 방정식으로 나타내는 것이 편리하다.



위 그림에서, 원점에서 x-축에 접하고 있는 반지름 r인 원 C가 x-축을 따라 오른쪽으로 굴러 이동하여 점 P에서 접하는 원 C'이 되었다고 하자, 그리고 원점과 접한 원 위의 점 A는 이 이동으로 인해 접점 P로부터 시계방향으로 θ만큼 돌아간 A'의 위치에 오게 되었다고 하자. A'의 좌표를 (x,y)라 하면 이 싸이클로이드곡선의 방정식은 매개변수방정식

$$x = r(\theta - \sin(\theta)), \qquad y = r(1 - \cos(\theta))$$

로 주어진다. 이것은 선분 AP와 원호 $A'P$의 길이가 같고 $r\theta$이기 때문에 $x = AP - A'H = r\theta - r\sin(\theta) = r(\theta - \sin(\theta))$이고 $y = C'P - C'H = r - r\cos(\theta) = r(1 - \cos(\theta))$이기 때문이다. 이 방정식에 적절하게 적분을 적용하면, 싸이클로이드곡선의 길이나 싸이클로이드곡선으로 둘러싸인 영역의 넓이를 구할 수 있다.

미적분학이 개발되기 전인 17세기 초반에 로베르발(Roberval)은 카발리에리(Cavalieri)의 원리를 적용하여 싸이클로이드곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구했다.

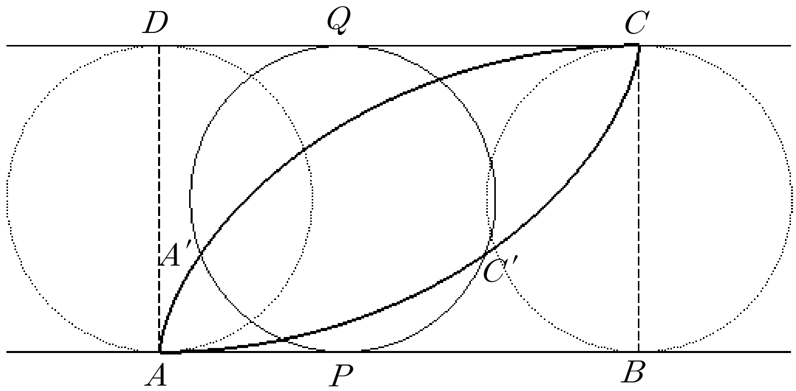
카발리에리의 원리. 이탈리아의 수학자 카발리에리가 발견한 원리로서, 두 입체 V_1, V_2를 정해진 한 평면과 평행인 임의의 평면으로 자를 때, V_1, V_2의 잘린 부분의 넓이의 비가 항상 $s:t$이면 두 입체 V_1, V_2의 부피의 비도 $s:t$가 된다.

이 카발리에리의 원리는 두 평면도형 S_1, S_2와 그 넓이에 대해서도 다음과 같이 성립한다: 정해진 한 직선에 평행인 임의의 직선으로 두 도형 S_1, S_2를 자를 때, S_1, S_2의 잘린 두 선분의 길이의 비가 항상 $s:t$이면 S_1, S_2의 넓이의 비도 $s:t$이다

[문제 1-1] (10 점) 반지름이 a인 원 C와 장축과 단축이 각각 a와 b인 타원 E(예컨대, 방정식 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$로 주어지는 타원)에 대해 카발리에리의 원리를 적용하여 타원 E의 넓이를 구하라.

[문제 1-2] (15 점) 원이 한 바퀴 돌아 만들어진 싸이클로이드곡선은 모두 닮은꼴임을 보여라. (두 곡선 S_1과 S_2가 닮은꼴이라 함은, S_1과 S_2를 적당히 위치시키고 적당한 점 O를 잡으면 O에서 시작하는 임의의 반직선이 곡선 S_1, S_2와 각각 만나는 점 P, Q에 대해 비 $OP:OQ$가 일정하게 됨을 뜻한다.)

※ 다음 그림을 참조하여 [문제 1-3,4]에 답하라.



위 그림에서,곡선 $AA'C$는 A에서 접하고 있던 반지름 r인 원이 선분 AB를 따라 B까지 굴러갈 때 원 위의 점 A가 그린 싸이클로이드곡선이고, 곡선 $CC'A$는 C에서 접하고 있던 반지름 r인 원이 선분 CD를 따라 D까지 굴러갈 때 원 위의 점 C가 그린 싸이클로이드곡선이다. 단, AD와 BC는 이 원들의 지름이고, A'과 C'은 그림과 같이 P와 Q에 동시에 접하는 반지름 r인 원 위에 있다.

[문제 1-3] (15 점) 선분 $A'C'$이 선분 AB에 평행함을 보여라.

[문제 1-4] (10 점) 카발리에리의 원리와 [문제 1-3]의 결과를 이용하여 싸이클로이드곡선 $AA'C$와 선분 AB 그리고 원의 지름 BC로 둘러싸인 영역의 넓이를 구하라.

문제 2 (50 점)

17세기의 수학자 베르누이(Jacob Bernoulli)는 연속한 정수들의 거듭제곱의 합에 대한 일반 공식을 찾으려던 과정 중에 매우 특별한 성질을 갖는 다항식들을 발견했다. 이 다항식들은 그의 이름을 따라 명명되었고, 수학의 여러 분야와 깊게 관련되어 있음이 밝혀졌다.

먼저, 0차 베르누이 다항식은 $B_0(x)=1$이다. $m \geqq 1$이라고 하자. m차 **베르누이 다항식** $B_m(x)$는 다음과 같이 귀납적으로 정의된다. 만일 $(m-1)$차 베르누이 다항식 $B_{m-1}(x)$가 알려졌으면, m차 베르누이 다항식 $B_m(x)$는 조건

(1) $$\frac{d}{dx}B_m(x)=mB_{m-1}(x)$$

와

(2) $$\int_0^1 B_m(x)\,dx=0$$

을 만족하도록 결정된다. $B_1(x)$를 구해 보자. $m=1$일 때 식 (1)을 적용하면 $B_1(x)$는 $B_0(x)$의 원시함수이므로, 적당한 상수 b_1에 대하여 $B_1(x)=x+b_1$으로 쓸 수 있다. 식 (2)에 의하여 $B_1(x)$의 적분값이 0이므로 $b_1=-\frac{1}{2}$임을 계산할 수 있다. 따라서

$$B_1(x)=x-\frac{1}{2}$$

이다. 같은 과정을 반복하여 차례대로

$$B_2(x)=x^2-x+\frac{1}{6}$$

$$B_3(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x$$

$$B_4(x)=x^4-2x^3+x^2-\frac{1}{30}$$

$$B_5(x)=x^5-\frac{5}{2}x^4+\frac{5}{3}x^3-\frac{1}{6}x$$

등을 구할 수 있다. m차 베르누이 다항식의 상수항을 m번째 **베르누이 수**라 하고 b_m으로 쓴다. 다시 말하면, $b_m=B_m(0)$이다. 예를 들면, $b_0=1$, $b_1=-\frac{1}{2}$, $b_2=\frac{1}{6}$, $b_3=0$, $b_4=-\frac{1}{30}$, $b_5=0$ 등이다. 수학적 귀납법을 사용하면

(3) $$B_m(x)=\sum_{k=0}^{m}\frac{m!}{k!\,(m-k)!}b_k x^{m-k}$$

을 보일 수 있다. 여기서 $0!=1$이다. 증명은 생략한다.

[문제 2-1] (10점) 구간 $0 \leqq x \leqq 1$에서 3차 베르누이 다항식 $B_3(x)$의 최댓값과 최솟값을 구하라.

[문제 2-2] (10점) 6차 베르누이 다항식 $B_6(x)$를 계산하라.

[문제 2-3] (15점) (a) 모든 정수 $m \geqq 2$에 대하여 $B_m(0) = B_m(1)$임을 보여라.
(b) $m \geqq 1$이면

$$b_m = -\sum_{k=0}^{m-1} \frac{m!}{k!(m-k)!} \frac{b_k}{m-k+1}$$

가 성립함을 보여라.

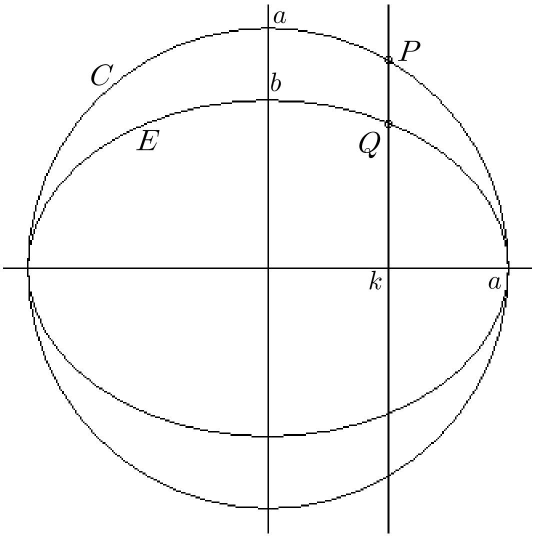
[문제 2-4] (15점) (a) 모든 정수 $m \geqq 0$에 대하여

$$B_{m+1}(x+1) - B_{m+1}(x) = (m+1)x^m$$

이 성립함을 보여라.
(b) 일반적으로 모든 자연수 n과 m에 대하여 다음 식이 성립함을 증명하라.

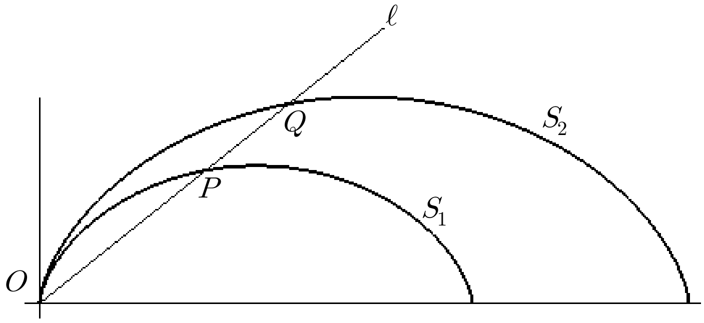
$$1^m + 2^m + \cdots + n^m = \frac{1}{m+1}(B_{m+1}(n+1) - b_{m+1})$$

[문제 1-1] 문제의 원 C와 타원 E를 함께 좌표평면에 그리면 다음과 같다.



y-축에 나란한 직선 $x=k$가 원 C, 타원 E와 만나는 점을 그림과 같이 각각 P, Q라하면, P의 좌표는 $\left(k, \sqrt{a^2-k^2}\right)$이고 Q의 좌표는 $\left(k, \frac{b}{a}\sqrt{a^2-k^2}\right)$이다. 그러므로, y-축에 나란한 직선 $x=k$에 의해 C, E의 잘린 선분의 길이는 각각 $2\sqrt{a^2-k^2}$과 $\frac{2b}{a}\sqrt{a^2-k^2}$이고 그 비는 $a:b$로 일정하다. 따라서, 카발리에리의 원리에 의해 C와 E의 넓이의 비도 $a:b$이다. 그런데, C의 넓이는 πa^2이다. 그러므로, E의 넓이는 $\frac{b}{a}\times\pi a^2=\pi ab$이다.

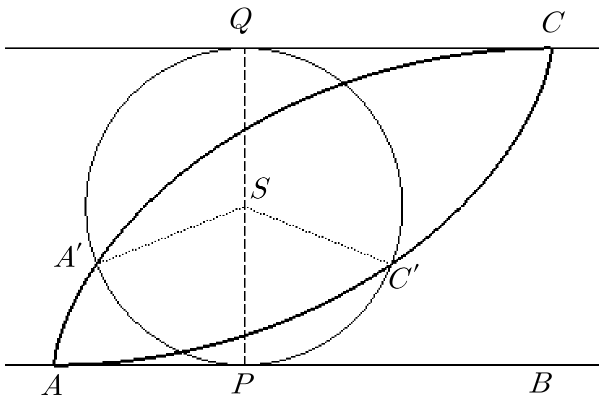
[문제 1-2] 원점에서 x-축에 접하고 있던 반지름이 각각 1과 r인 원에 의해 생성된 싸이클로이드곡선 S_1과 S_2가 다음 그림과 같이 위치하고 있다고 하자. (그림은 $r>1$인 경우를 나타내고 있다.)



O에서 시작하는 임의의 반직선 ℓ이 S_1, S_2와 만나는 점을 각각 P, Q라 하고, P의 좌표가 $(t-\sin t, 1-\cos t)$라 하자. 그러면, 좌표가 $(r(t-\sin t), r(1-\cos t))$인 점은 직선 ℓ 위에 있으면서 동시에 싸이클로이드곡선 S_2 위에 있게 된다. 즉, Q의 좌표가

$(r(t-\sin t), r(1-\cos t))$가 된다. 따라서, $OP : OQ = (t-\sin t) : r(t-\sin t) = 1 : r$이 되어 일정하므로 S_1과 S_2는 닮은꼴이다.

[문제 1-3] 다음 그림에서

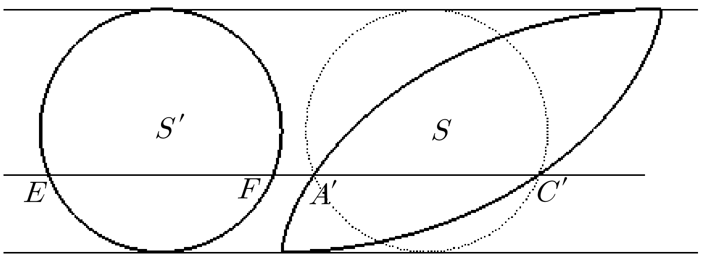


$t = \angle PSA'$이라 하면, $AP = rt$이다. 그러면, $CQ = BP = AB - AP = \pi r - rt = r(\pi - t)$가 되므로 $\angle QSC' = \pi - t$가 된다. 따라서,

$$\angle PSC' = \pi - \angle QSC' = \pi - (\pi - t) = t = \angle PSA'$$

이 되어 $A'C'$은 AB에 평행하게 된다.

[문제 1-4] [문제 1-3]에 의해 다음 그림의 선분 $A'C'$은 직선 AB에 평행인 직선에 의해 두 싸이클로이드곡선 $AA'C$와 $CC'A$으로 둘러싸인 영역이 잘린 부분이면서 원 S가 잘린 부분이기도 하다.



따라서, 직선 AB에 평행인 직선으로 원 S와 S'을 각각 자른 선분 $A'C'$과 선분 EF는 길이가 같게 된다. 그러면, 카발리에리의 원리에 의해 두 싸이클로이드곡선 $AA'C$와 $CC'A$으로 둘러싸인 영역의 넓이는 원 S'의 넓이와 같은 πr^2이 된다. 그러므로 구하는 넓이는 두 싸이클로이드곡선 $AA'C$와 $CC'A$으로 둘러싸인 영역의 넓이의 반에 $\triangle ABC$의 넓이를 더하면 되므로 $\frac{1}{2}\pi r^2 + \frac{1}{2}\pi r \cdot 2r = \frac{3}{2}\pi r^2$이다.

[문제 2-1] 도함수의 영점을 구하면 $B'_3(x) = 3x^2 - 3x + \frac{1}{2} = 0$으로부터 $x_1 = \frac{3-\sqrt{3}}{6}$과 $x_2 = \frac{3+\sqrt{3}}{6}$을 얻는다. 두 점은 모두 0과 1 사이에 있다. $B_3(x)$는 $x = x_1$에서 극댓값 $B_3(x_1) = \frac{\sqrt{3}}{36}$와 $x = x_2$에서 극솟값 $B_3(x_2) = -\frac{\sqrt{3}}{36}$을 갖는다. 그런데 $B_3(0) = 0$이고 $B_3(1) = 0$이므로 $B_3(x)$의 최댓값은 $\frac{\sqrt{3}}{36}$이고 최솟값은 $-\frac{\sqrt{3}}{36}$이다.

[문제 2-2] $B_6(x)$는 $6B_5(x) = 6x^5 - 15x^4 + 10x^3 - x$의 원시함수이므로

$$B_6(x) = x^6 - 3x^5 + \frac{5}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + b_6$$

이다. 조건 $\int_0^1 B_6(x)\,dx = 0$을 만족해야 하므로 $b_6 = \frac{1}{42}$을 얻는다. 따라서

$$B_6(x) = x^6 - 3x^5 + \frac{5}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{42}$$

이다.

[문제 2-3] (a) $m \geq 2$이면, 식 (1)과 (2)를 이용하여

$$0 = \int_0^1 B_{m-1}(x)\,dx = \frac{1}{m}\big(B_m(1) - B_m(0)\big)$$

이다. 그래서 $B_m(0) = B_m(1)$가 성립한다.

(b) $m \geq 1$이면, (a)에서 증명된 사실과 본문의 식 (3)을 이용하여

$$b_{m+1} = B_{m+1}(0) = B_{m+1}(1) = \sum_{k=0}^{m+1} \frac{(m+1)!}{k!(m-k+1)!} b_k$$

을 얻는다. 양변에서 b_{m+1}을 지우면,

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{(m+1)!}{k!(m-k+1)!} b_k = 0$$

이 된다. 한편 좌변은

$$(m+1)b_m + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(m+1)!}{k!(m-k+1)!} b_k = (m+1)b_m + (m+1)\sum_{k=0}^{m-1} \frac{m!}{k!(m-k)!} \frac{b_k}{m-k+1}$$

이므로 원하는 식이 증명된다.

[문제 2-4] (a) 수학적 귀납법을 사용한다. $m = 0$인 경우

$$B_1(x+1) - B_1(x) = (x+1) - \frac{1}{2} - \left(x - \frac{1}{2}\right) = 1$$

이므로 사실이다. $B_{m+1}(x+1) - B_{m+1}(x) = (m+1)x^m$이 성립한다고 가정하자. $B_{m+2}(x)$는 $(m+2)B_{m+1}(x)$의 원시함수이므로 이제

$$
\begin{aligned}
B_{m+2}(x+1)-B_{m+2}(x) &= \int (m+2)B_{m+1}(x+1)dx - \int (m+2)B_{m+1}(x)dx \\
&= (m+2)(m+1)\int x^m dx \\
&= (m+2)x^{m+1} + C
\end{aligned}
$$

이고, 여기서 C는 적분상수이다. $x=0$을 대입하면 $B_{m+2}(1)-B_{m+2}(0)=0$이므로 $C=0$이다. 증명이 끝났다.

(b) (a)의 식에 $x=1,2,...,n$을 차례대로 대입하여 합하면,

$$
\sum_{k=1}^{n} k^m = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{m+1}(B_{m+1}(k+1)-B_{m+1}(k)) = \frac{1}{m+1}(B_{m+1}(n+1)-B_{m+1}(1))
$$

이 된다. $B_{m+1}(1)=b_{m+1}$이므로 원하던 식이 증명되었다.